Journal of Number Theory **73**, 201–211 (1998)
Article No. NT982305

Transcendance des fractions continues de Thue–Morse

M. Queffélec

URA gat, U.S.T. Lille, 59655, Villeneuve d'Asq cedex, France
E-mail: martine@gat.univ-lille1.fr

Communicated by M. Waldschmidt

Received June 25, 1997; revised March 16, 1998

On se propose de démontrer que le nombre réel dont la suite des quotients partiels est la suite de Thue–Morse sur l'alphabet $\{a, b\}$, où a et b sont des entiers distincts $\geqslant 1$, est un nombre transcendant.

1. INTRODUCTION

Une question naturelle est celle-ci: peut-on déduire la nature algébrique d'un nombre réel de la connaissance des termes de son développement, dans une base entière, dans une base de Pisot, en fraction continue, etc.?

En ce qui concerne le développement en fraction continue, on sait reconnaître les nombres rationnels—leur développement est fini—et les nombres irrationnels quadratiques par le théorème de Lagrange [6]:

Proposition 1.1. *Un réel positif x est un irrationnel quadratique si et seulement si la suite de ses quotients partiels est ultimement périodique.*

Mais on ne sait pas décider sur le développement en fraction continue d'un irrationnel si ce nombre est cubique par exemple; en prenant la question à l'envers, que peut-on dire d'un réel dont la suite des quotients partiels "ressemble" à une suite périodique? Les suites ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, presque-périodiques ou automatiques, sont proches des suites périodiques, les unes par leur corrélation discrète, les autres par leur basse complexité en général. En réponse à une question de Michel Mendès France, nous nous proposons de démontrer

Théorème 1.1. *Soit a, b deux entiers distincts $\geqslant 1$. Le nombre réel de $]0, 1[$ dont la suite des quotients partiels est la suite de Thue–Morse sur l'alphabet $\{a, b\}$ est un nombre transcendant.*

En notant, comme d'habitude, $a_0, a_1, a_2, \ldots$ la suite des quotients partiels du nombre α et p_n/q_n le rationnel $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$, on sait prouver

0022-314X/98 $25.00

depuis longtemps, comme conséquence du théorème de Liouville et de l'inégalité

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \leqslant \frac{1}{q_n q_{n+1}} \leqslant \frac{1}{q_n^2 a_{n+1}},$$

que le nombre α est transcendant si la suite (a_n) croît extrêmement vite. La transcendance du nombre peut se déduire également du comportement de la suite des dénominateurs q_n. Davenport et Roth ont ainsi démontré ([4]):

Si $\limsup \log \log q_n \sqrt{\log n}/n = +\infty$, alors α est transcendant.

Les nombres dont la suite des quotients partiels est bornée sont par contre mal approchables par des rationnels (s'ils ne le sont pas eux-mêmes), et, dès 1906, Maillet [8] utilisé la mauvaise approximation des nombres algébriques non quadratiques par les irrationnels quadratiques, pour établir la transcendance de certains nombres à quotients partiels bornés ou non: si la suite (a_n) présente des plages d'une même lettre (ou d'un même mot) de la forme $a_n a_{n+1} \cdots a_{n+\lambda(n)}$ où la suite $\lambda(n)$ tend très vite vers ∞ en fonction de q_n, alors le nombre est transcendant. Ses résultats seront améliorés plus tard par Baker [1]. Plus récemment, Davison [5] exhibe une infinité de nombres réels transcendants à quotients partiels dans $\{1, 2\}$, les développements étant choisis de la forme $1 + ([n\alpha] \bmod 2)$ où α est un irrationnel, et nous reprenons ses techniques pour établir notre résultat.

2. LE NOMBRE DE MORSE–MAHLER

Commençons par rappeler les résultats élémentaires de la théorie des fractions continues qui nous serviront ici.

Tout réel positif α est limite de la suite de rationnels

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}},$$

et on écrit

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}} = [a_0, a_1, a_2 \cdots],$$

avec $a_0 = [\alpha]$.

Le rationnel p_n/q_n se note également $[a_0, a_1, ..., a_n]$, et, de l'identité $p_{n+1}/q_{n+1} = [a_0, a_1, ..., a_n + 1/a_{n+1}]$, on déduit par récurrence les relations

$$p_{n+1} = a_{n+1} p_n + p_{n-1}$$

$$q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1}$$

$$p_0 = 0, \qquad p_{-1} = 1 \qquad q_0 = 1, \qquad q_{-1} = 0$$

que l'on écrit sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \\ p_n & q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ p_{n-1} & q_{n-1} \end{pmatrix}.$$

On en déduit immédiatement en prenant le déterminant que

$$p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_n = (-1)^{n+1}.$$

La qualité d'approximation du nombre α par le rationnel p_n/q_n, rappelée dans l'introduction, se déduit de l'identité $\alpha = [a_0, a_1, ..., a_n, A_{n+1}]$ où A_{n+1} désigne le nombre dont le développement est $[a_{n+1}, a_{n+2}, ...]$; ce nombre étant compris entre a_{n+1} et $a_{n+1} + 1$ et, par ailleurs, relié à α par

$$\alpha = \frac{A_{n+1} p_n + p_{n-1}}{A_{n+1} q_n + q_{n-1}}$$

il s'ensuit que

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n(A_{n+1} q_n + q_{n-1})}$$

et ainsi

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \leqslant \frac{1}{q_n(a_{n+1} q_n + q_{n-1})} \leqslant \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

En fait, la suite (p_n/q_n) possède une propriété de meilleure approximation, à savoir $|\alpha - p_n/q_n| \leqslant |\alpha - p/q|$ pour tout rationnel p/q de dénominateur $q < q_{n+1}$ si $n > 1$.

Soit x le nombre réel de $[0, 1]$ dont les quotients partiels sont

$$abbabaabbaababbabaababbaabbabaabbaababbaabba \cdots$$

suivant la suite de Thue–Morse [3]. Cette suite est point fixe de la substitution ζ définie sur l'alphabet $\{a, b\}$ par

$$\zeta(a) = ab, \qquad \zeta(b) = ba.$$

On sait que cette suite n'est pas ultimement périodique [3]. Une façon rapide de le voir est de montrer que sa fonction génératrice n'est pas une fraction rationnelle. Considérons plutôt la suite de Morse $(m_n)_{n \geqslant 0}$ sur l'alphabet $\{1, -1\}$; cette suite vérifie les relations de récurrence $m_{2n} = m_n$, $m_{2n+1} = -m_n$, $m_0 = 1$, et sa fonction génératrice, $F(z) = \sum m_n z^n$, l'équation fonctionnelle $F(z) = (1-z)\, F(z^2)$; si F était une fraction rationnelle non nulle, 1 serait zéro ou pôle de $F(z)$ et $F(z^2)$ avec le même ordre, ce qui est incompatible avec l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction F. Le nombre de Morse–Mahler n'est donc pas un irrationnel quadratique, ceci pour tous entiers $a \neq b$ non nuls.

La suite de Thue–Morse sur $\{a, b\}$ n'a pas de plage arbitrairement longue d'une même lettre ou d'un même mot. Elle possède en fait une propriété forte de non-chevauchement: si B est un mot de la suite commençant par la lettre b_0, le mot BBb_0 n'apparaît pas dans la suite [2].

Ce cas de transcendance ne relève donc pas des cas traités par Maillet [8], ou Baker [1].

Enfin, de par ses propriétés arithmétiques, il est facile de voir qu'il n'existe aucun irrationnel α tel que la suite de Thue–Morse sur l'alphabet $\{1, 2\}$ soit de la forme $1 + ([n\alpha] \pmod 2)$. En effet, si c'était le cas, pour un irrationnel α de $]0, 1[$, la suite $([n\alpha] \pmod 2)$ coïnciderait avec la suite de Morse (a_n) à valeurs dans l'alphabet $\{0, 1\}$. Elle devrait donc vérifier les relations de récurrence

$$a_{2n} = a_n, \qquad a_{2n+1} = 1 - a_n, \qquad a_0 = 1,$$

qui conduisent à

$$[2n\alpha] \equiv [n\alpha] \pmod 2, \qquad [(2n+1)\,\alpha] \equiv 1 + [n\alpha] \pmod 2.$$

En particulier, pour tout n, $[2n\alpha]$ et $[(2n+1)\,\alpha]$ seraient de parité opposée. Cela impliquerait $[(2n+1)\,\alpha] = [2n\alpha] + 1$ pour tout n, ou encore, en notant $\{x\} = x - [x]$ la partie fractionnaire de l'irrationnel x,

$$\{2n\alpha\} + \alpha = (2n+1)\,\alpha - [2n\alpha] = 1 + \{(2n+1)\,\alpha\} > 1.$$

Ainsi la suite $\{2n\alpha\}$ serait à valeurs dans $]1-\alpha, 1[$, ce qui contredit la densité de cette suite. Le nombre x ainsi défini n'est donc pas un des nombres étudiés par Davison [5].

Notons, comme l'a fait Mahler [7], $F(2)$, l'ensemble des nombres réels de $]0, 1[$ dont le développement en fraction continue ne comporte que des 1 et des 2. Cet ensemble a un plus grand élément qui est le réel $1 + \sqrt{3} = [2, 1, 2, 1, 2, 1, ...]$. Pour tout α dans $F(2)$,

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n(A_{n+1} q_n + q_{n-1})}$$

$$\geqslant \frac{1}{q_n((1+\sqrt{3})\, q_n + q_{n-1})} \geqslant \frac{1}{(2+\sqrt{3})\, q_n^2}$$

ce qui prouve que $|\alpha - p/q| \geqslant 1/(2+\sqrt{3})\, q^2$ pour tout rationnel p/q et que les nombres réels de $F(2)$ sont mal approchables par les rationnels. Plus généralement, les irrationnels à quotients partiels bornés sont mal approchables par les rationnels, qu'ils soient algébriques ou transcendants.

Nous allons donc utiliser la mauvaise approximation des nombres algébriques non quadratiques par les nombres quadratiques irrationnels, sous la forme qu'en a donnée W. Schmidt [9].

Si ξ est racine de l'équation à coefficients entiers $r\xi^2 + s\xi + t = 0$ où (r, s, t) sont premiers dans leur ensemble, on appelle *hauteur de* ξ et on note $H(\xi)$ le nombre $\max(|r|, |s|, |t|)$.

Théorème 2.1 (W. Schmidt [9]). *Soit x un nombre réel, non quadratique, de $]0, 1[$. S'il existe une infinité de nombres irrationnels quadratiques ξ_k, et un nombre $\theta > 3$ tels que*

$$|x - \xi_k| < H(\xi_k)^{-\theta},$$

alors x est un nombre transcendant.

On aura besoin des deux remarques évidentes suivantes:

Proposition 2.1. *Si $\xi \in]0, 1[$ est à développement exactement périodique, de période $a_1 a_2 \cdots a_k$, alors $H(\xi) \leqslant q_k$.*

Démonstration. $\xi = [0, a_1, a_2, ..., a_k, 1/\xi]$ c'est-à-dire

$$\xi = \frac{p_k + \xi p_{k-1}}{q_k + \xi q_{k-1}}$$

et

$$q_{k-1} \xi^2 + \xi(q_k - p_{k-1}) - p_k = 0.$$

Puisque $\xi \in]0, 1[$, $p_n \leqslant q_n$ pour tout $n \geqslant 1$ et

$$H(\xi) \leqslant \max(q_{k-1}, |q_k - p_{k-1}|, p_k) \leqslant q_k. \quad \blacksquare$$

Proposition 2.2. *Si x et y dans $]0, 1[$ ont les mêmes k premiers quotients partiels $a_1 a_2 ... a_k$, alors $|x - y| \leqslant 1/q_k^2$.*

Démonstration. Puisque $p_k/q_k = [0, a_1, a_2, ..., a_k]$, on a à la fois $|x - p_k/q_k| \leqslant 1/q_k^2$ et $|y - p_k/q_k| \leqslant 1/q_k^2$. Par ailleurs, $x - p_k/q_k$ et $y - p_k/q_k$ ayant même signe ne dépendant que de k, on peut écrire

$$|x - y| = \left| \left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| - \left| y - \frac{p_k}{q_k} \right| \right| \leqslant \frac{1}{q_k^2}. \quad \blacksquare$$

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

Soit donc $x \in]0, 1[$ le nombre de développement $[0, a_1, a_2, ...]$ où $(a_n)_{n \geqslant 1}$ est la suite de Morse sur $\{a, b\}$ avec $a \neq b$. Pour alléger la rédaction, *on identifiera désormais le nombre réel à la suite de ses quotients partiels.*

Puisque pour tout k on a $x = \zeta^k(x)$, x commence pour tout k par le mot $\omega_k = \zeta^k(a)\, \zeta^k(b)\, \zeta^k(b)$. Si ξ_k est la suite exactement périodique, de période ω_k, ξ_k est un irrationnel quadratique de hauteur $H(\xi_k) \leqslant q_{b_k}$ par la première remarque, où b_k, la longueur du mot ω_k, vaut 3.2^k.

Maintenant, puisque la suite commence aussi par *abbab*, elle commence par $\zeta^k(a)\, \zeta^k(b)\, \zeta^k(b)\, \zeta^k(a)\, \zeta^k(b)$ pour tout k, de sorte que x et ξ_k ont en commun les $5.2^k = c_k$ premiers quotients partiels et, d'après la seconde remarque,

$$|x - \xi_k| \leqslant \frac{1}{q_{c_k}^2}.$$

Si $q_{b_k}^\theta < q_{c_k}^2$ pour une infinité de k, où θ est un nombre > 3, alors

$$|x - \xi_k| \leqslant \frac{1}{q_{c_k}^2} < q_{b_k}^{-\theta} \leqslant H(\xi_k)^{-\theta}$$

et le théorème découle du théorème de W. Schmidt.

Tout revient à estimer le comportement de la suite (q_n) des dénominateurs associés au nombre x.

Notons A la matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et B la matrice $\left(\begin{smallmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Rappelons que le rayon spectral de la matrice X, défini par $\rho(X) = \lim_n \|X^n\|^{1/n}$, où $\|X\|$ désigne la norme opérateur de X, est aussi $\sup\{|\lambda|, \lambda$ valeur propre de $X\}$. Davison a obtenu l'estimation suivante:

Si le chiffre a apparaît dans la suite x avec la fréquence α, et le chiffre b avec la fréquence β, alors

$$\limsup q_n^{1/n} \leqslant (\rho(A))^\alpha\, (\rho(B))^\beta.$$

Dans le cas de la suite de Thue–Morse, on obtient la majoration

$$\limsup q_n^{1/n} \leqslant \sqrt{\rho(A)\,\rho(B)}$$

puisque les lettres ont même fréquence $\frac{1}{2}$, ce qu'on peut déduire facilement des formules de récurrence satisfaites par cette suite.

En utilisant la propriété d'auto-similarité de la suite de Thue–Morse, cette majoration admet l'amélioration

Lemme 3.1. *Soit (q_n) la suite des dénominateurs de la fraction continue de Thue–Morse sur $\{a, b\}$; alors*

$$\limsup q_n^{1/n} \leqslant \sqrt{\|AB\|}$$

Démonstration. Si u_n désigne le vecteur $\binom{q_n}{q_{n-1}}$, en particulier $u_0 = \binom{1}{0}$ et on a

$$u_n = \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u_0 = W_n u_0$$

en notant $W_n = W_n(A, B)$ le produit des n matrices A ou B, dans l'ordre inverse d'apparition des lettres a ou b dans le mot $[a_1, a_2, ..., a_n]$. On en déduit

$$\|u_n\| \leqslant \|W_n\| \leqslant \|A\|^m \, \|B\|^{n-m}$$

si A apparaît m fois dans le produit W_n, par propriété de la norme opérateur.

En invoquant cette fois l'invariance de la suite de Thue–Morse par l'action de ζ, cette suite est aussi bien la suite de Thue–Morse construite sur l'alphabet $\{\zeta(a), \zeta(b)\}$ et le nombre x aussi bien associé aux matrices initiales AB, BA. Ainsi $u_{2n} = W_{2n} u_0$ où $W_{2n} = W_{2n}(A, B) = W_n(BA, AB)$, et

$$\|u_{2n}\| \leqslant \|W_{2n}\| \leqslant \|AB\|^m \, \|BA\|^{n-m}$$

si AB apparaît m fois dans le produit W_{2n}. Les matrices A et B étant symétriques, AB est la transposée de BA, et ces deux matrices ont même norme; ainsi

$$\|u_{2n}\|^{1/2n} \leqslant \|AB\|^{1/2}$$

d'où l'on tire

$$\limsup \|u_n\|^{1/n} \leqslant \sqrt{\|AB\|}.$$

Maintenant, $q_n < \|u_n\| < \sqrt{2}\, q_n$, et,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,\|u_n\| < q_n < \|u_n\|.$$

La seconde inégalité établit le lemme, et nous utiliserons la première pour la minoration. (A noter que $\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\| = \rho(A)\,\rho(B)$ puisque les matrices A et B sont symétriques, d'où l'amélioration.) ∎

Pour la minoration, nous allons établir une inégalité concernant la sous-suite (q_{c_k}) associée au nombre de Morse–Mahler, ce qui suffira pour notre propos. Il nous faut pour cela estimer le rayon spectral de produits des matrices A et B:

On désigne par $\zeta^n(A) = A_n$ le produit de matrices associé au mot $\zeta^n(a)$ et $\zeta^n(B) = B_n$ le produit de matrices associé au mot $\zeta^n(b)$. Ainsi $A_0 = A$, $B_0 = B$, et pour $n \geqslant 0$, $A_{n+1} = B_n A_n$ et $B_{n+1} = A_n B_n$. On vérifie par récurrence que A_n et B_n sont symétriques si n est pair, et que $B_n = A_n^*$ si n est impair, X^* désignant la transposée de la matrice X.

Lemme 3.2. *Pour $n \geqslant 1$,*

$$\rho(A_n) \geqslant (\rho(AB))^{2^{n-1}}.$$

Démonstration. Le lemme va résulter des propriétés du rayon spectral: pour toute matrice X,

$$\rho(XX^*) = \|XX^*\| = \|X\|^2 \geqslant \rho(X)^2,$$

et $\rho(XY) = \rho(YX)$ si X et Y sont des matrices carrées.

Supposons n pair, égal à $2k+2$. Alors, suivant ces remarques,

$$\begin{aligned}\rho(A_{2k+2}) &= \rho(B_{2k+1} A_{2k+1})\\ &= \rho(A^*_{2k+1} A_{2k+1})\\ &\geqslant (\rho(A_{2k+1}))^2.\end{aligned}$$

Supposons à présent n impair, égal à $2k+1$.

$$\begin{aligned}\rho(A_{2k+1}) &= \rho(B_{2k} A_{2k})\\ &= \rho(B_{2k-1} A_{2k-1} A_{2k-1} B_{2k-1})\\ &= \rho(B^2_{2k-1} A^2_{2k-1})\\ &= \rho((A^*_{2k-1})^2\, A^2_{2k-1})\\ &= \rho((A^2_{2k-1})^*\, A^2_{2k-1})\\ &\geqslant (\rho(A^2_{2k-1}))^2 = (\rho(A_{2k-1}))^4.\end{aligned}$$

Finalement, en itérant ces inégalités,

$$\rho(A_{2k+1}) \geqslant \rho(A_{2k-1})^4 \geqslant \rho(A_1)^{2^{2k}} = \rho(A_1)^{2^{n-1}}$$

lorsque $n = 2k+1$, et,

$$\rho(A_{2k+2}) \geqslant \rho(A_{2k+1})^2 \geqslant \rho(A_1)^{2^{2k+1}} = \rho(A_1)^{2^{n-1}}$$

si $n = 2k+2$, et le lemme 3.2 est démontré. ▮

On en déduit

Lemme 3.3. *Soit q_n la suite des dénominateurs du nombre de Morse–Mahler, et $c_k = 5.2^k$. Alors* $\liminf q_{c_k}^{1/c_k} \geqslant \sqrt{\rho(AB)}$.

Démonstration. Si $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ est une matrice dans le semi-groupe engendré par les matrices A et B, on a nécessairement $x \geqslant y \geqslant t$ et $x \geqslant z \geqslant t$; il suffit pour cela de vérifier que l'ensemble des matrices $\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix},\ x \geqslant y \geqslant t$ et $x \geqslant z \geqslant t\}$ est un semi-groupe. En particulier, si on écrit $W_n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ z_n & t_n \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} q_n \\ q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ z_n & t_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et $2q_n > q_n + q_{n-1} = x_n + z_n \geqslant x_n + t_n = Tr(W_n)$. Or on sait estimer la trace d'un produit de matrices de $SL(2, \mathbf{R})$ à l'aide du théorème de Cayley–Hamilton.

Notons pour simplifier Z_k le produit de matrices $B_k A_k B_k B_k A_k$ associé au mot $\zeta^k(abbab)$ de longueur c_k de sorte que $Z_k = W_{c_k}$; pour $k \geqslant 1$, A_k et B_k sont dans $SL(2, \mathbf{R})$ et vérifient l'équation de Cayley–Hamilton: $X^2 = Tr(X)\,X - I$. Si α_k et β_k sont les traces des matrices A_k et B_k, $\alpha_0 = a$, $\beta_0 = b$, et pour $k \geqslant 1$, $\alpha_k = \beta_k$.

Une application répétée de l'identité de Cayley–Hamilton et l'utilisation des propriétés de la trace conduit à

$$\begin{aligned} Tr(Z_k) &= Tr(A_{k+1} B_k A_{k+1}) \\ &= Tr(A_{k+1}^2 B_k) \\ &= \alpha_{k+1} Tr(A_{k+1} B_k) - Tr(B_k) \\ &= \alpha_{k+1} Tr(A_k B_k^2) - Tr(B_k) \\ &= \alpha_{k+1} \alpha_k Tr(A_k B_k) - \alpha_k - \alpha_{k+1} \alpha_k \\ &= \alpha_{k+1}^2 \alpha_k - \alpha_{k+1} \alpha_k - \alpha_k. \end{aligned}$$

Comme la trace d'une matrice de $SL(2,\mathbf{R})$ est supérieure à son rayon spectral si celui-ci est supérieur à 1, α_k tend vers $+\infty$ avec k, et $Tr(Z_k)$ est équivalente à $\alpha_{k+1}^2\alpha_k$ lorsque k tend vers $+\infty$.

La démonstration du lemme 3.3 va découler maintenant du lemme précédent: en se rappelant que $q_{c_k} \geqslant \frac{1}{2}Tr(Z_k)$,

$$\liminf q_{c_k}^{1/c_k} \geqslant \liminf Tr(Z_k)^{1/c_k} \geqslant \liminf(\rho(A_{k+1})^2\,\rho(A_k))^{1/c_k}$$

$$\geqslant \liminf \rho(AB)^{5.2^{2k-1}/c_k} = \sqrt{\rho(AB)},$$

puisque, par le lemme 3.2,

$$(\rho(A_{k+1}))^2\,\rho(A_k) \geqslant \rho(A_1)^{2^{2k+1}+2^{2k-1}} = \rho(A_1)^{5.2^{2k-1}}. \quad \blacksquare$$

Le théorème se déduit immédiatement de ces lemmes: pour obtenir le résultat par notre méthode, il suffit d'établir

$$\log \rho(AB) < \tfrac{9}{10}\log(\|AB\|)$$

puisque cette inégalité entraîne via les deux lemmes

$$\liminf \log q_{c_k}^{1/c_k} > \tfrac{9}{10}\limsup \log q_n^{1/n},$$

et $q_{b_k}^{\theta} < q_{c_k}^2$ pour une infinité de k et un nombre $\theta > 3$.

Il suffit en fait d'établir

$$\log \rho(A_{2h+1}) = \log \rho(A_{2h}B_{2h}) < \tfrac{9}{10}\log(\|A_{2h}B_{2h}\|) = \tfrac{9}{10}\log(\|A_{2h+1}\|)$$

pour h assez grand; en effet, en invoquant une nouvelle fois l'invariance de la suite de Thue–Morse sous l'action de ζ, cette suite est aussi bien la suite de Thue–Morse construite sur l'alphabet $\{\zeta^{2h}(a), \zeta^{2h}(b)\}$ et le nombre x aussi bien associé aux matrices initiales A_{2h}, B_{2h}, symétriques, auxquelles s'appliquent les trois lemmes.

Or, si $X = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & t \end{smallmatrix}\right)$ est dans $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ de déterminant 1, à coefficients positifs, $\|X\|^2 = \frac{1}{2}(T + \sqrt{T^2-4})$ où l'on a posé $T = x^2+y^2+z^2+t^2$, tandis que $\rho(X) = \frac{1}{2}(x+t+\sqrt{(x+t)^2-4})$; maintenant,

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{2^k} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{2^k} & p_{2^k} \\ q_{2^k-1} & p_{2^k-1} \end{pmatrix},$$

et, pour k impair, $\rho(A_k) \geqslant q_{2^k} + p_{2^k-1} - 1$, alors que $\|A_k\|^2 \leqslant 3(q_{2^k} + p_{2^k-1})^2$, puisque $p_n \leqslant q_n$ pour tout n, de sorte que le quotient

$$\frac{\log \rho(A_{2h+1})}{\log(\|A_{2h+1}\|)}$$

tend vers 1 quand h tend vers ∞. Ceci achève la preuve du théorème. ∎

REMERCIEMENT

Je tiens à remercier le referee pour les améliorations qu'il a tenu à apporter à la version initiale de cet article et le temps qu'il y a consacré.

RÉFÉRENCES

1. A. Baker, Continued fractions of transcendental numbers, *Mathematika* **9** (1962), 1–8.
2. J. Berstel et P. Seebold, A characterization of overlap-free morphisms, *Discrete Appl. Math.* **46** (1993), 275–281.
3. G. Christol, T. Kamae, M. Mendès France, et G. Rauzy, Suites algébriques, automates et substitutions, *Bull. Soc. Math. France* **108** (1980), 401–419.
4. H. Davenport et K. F. Roth, Rational approximations to algebraic numbers, *Mathematika* **2** (1955), 160–167.
5. J. L. Davison, A class of transcendental numbers with bounded partial quotients, *in* "Number Theory and Applications" (R. A. Mollin, Eds.), pp. 365–371, 1989.
6. G. H. Hardy et E. M. Wright, "An Introduction to the Theory of Numbers," Clarendon, Oxford, 1975.
7. K. Mahler, "Lectures on Transcendental Numbers," Lecture Notes in Math, Vol. 546, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1972.
8. E. Maillet, "Introduction à la théorie des nombres transcendants," Chapitre VII, Paris, 1906.
9. W. Schmidt, On simultaneous approximations of two algebraic numbers by rationals, *Acta Math.* **119** (1967), 27–50.